MEMO: $|A(x)| < K$; se $K \le 0 \Rightarrow$ impossibile

(1) PAG. 61 ES. 491 ZANICHELLI

$$y = \frac{|2x-3|-1}{|x|-2}$$

$\{$ C.E. $x \neq 2$ A.V. $\}$

$x>0$, $2x-3>0$, $2x>3$, $x>3/2>1,5$

$- \{ x<0;\ 0<x<3/2 \}$, $+ \{ x>3/2 \}$

$y > 0$

$$\frac{|2x-3|-1}{|x|-2} \ge 0$$

N x: $|2x-3|-1 \ge 0$

D x: $|x|-2>0$

$2x \ge 3 \Rightarrow x \ge 3/2 \le 1,5$

1° sistema

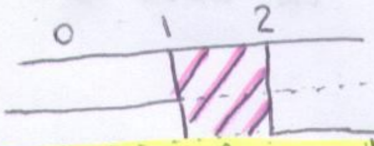
1° $\begin{cases} x>3/2 \to (2x-3) \ge 0 \Rightarrow 2x-3-1 \ge 0 \Rightarrow 2x \ge 4 \Rightarrow x \ge 2 \\ x<3/2 \to (2x-3) \le 0 \Rightarrow -2x+3-1 \ge 0 \Rightarrow -2x \ge -2 \Rightarrow x \le 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x \le 1$

2° sistema.

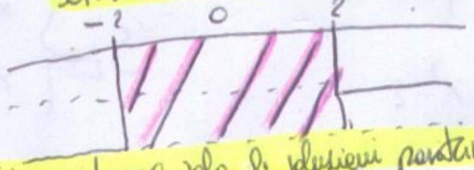
2° $\begin{cases} x>3/2 \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ x<3/2 \Rightarrow -x-2>0 \Rightarrow x<-2 \end{cases}$

Soluzioni comuni al 1° sistema



Si considerano solo le soluzioni positive! nessuna soluzione in comune

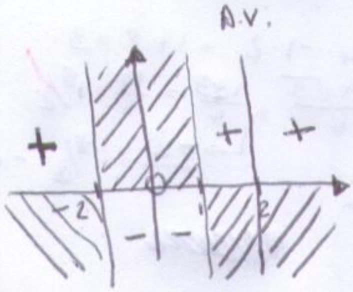
soluzioni comuni al 2° sistema.

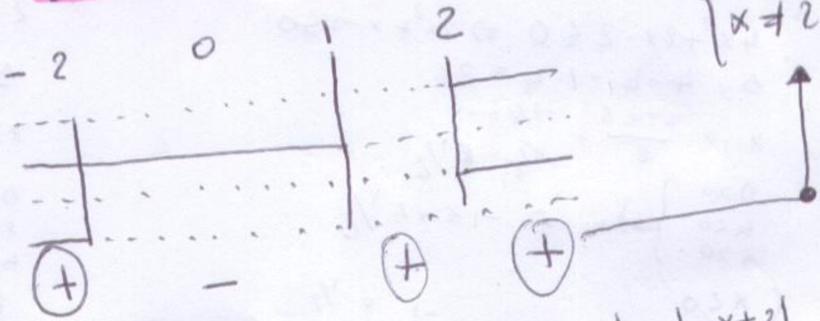


$\begin{cases} x<0 \\ 0<x<3/2 \\ x>3/2 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x<0 \\ x>3/2 \\ x<3/2 \end{cases}$

Si considerano solo le soluzioni positive! nessuna soluzione in comune

STUDIO DEL SEGNO DELLA $F(x)$





Risposta.

$\begin{cases} x<-2 \\ x \ge 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$ disequazione ≥ 0

1) $$y = |x+1| + \frac{|x-2|}{(2-x)} = \frac{(2-x)|x+1| + |x-2|}{(2-x)} = \frac{(2-x)|x+1| - |-x+2|}{(2-x)} =$$

$$= \frac{(2-x)(x+1) - |2-x|}{(2-x)} = \frac{\cancel{(2-x)} \cdot [(x+1)-|1|]}{\cancel{(2-x)}} = (x+1)-|1|$$

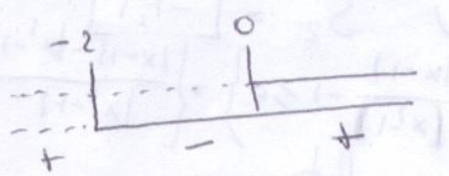
$x+1-1 \Rightarrow x$

$x+1+1 \Rightarrow x+2$

Pertanto era equivalente a risolvere le due $f(x)$ $\to y = x$, $\to y = x+2$

per $y>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x+2>0 \Rightarrow x>-2 \end{cases}$

STUDIO DEL SEGNO:



per $x \neq 2$ -

OK

Questa $f(x)$ può essere negativa $\Rightarrow$ Esempio: $x=-5$

$-5+x-1 = -5 \neq$ da

$\Downarrow$

$|-5+1| + \frac{(-5-2)}{(2+5)} =$

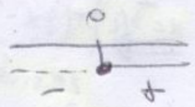
$= +4 + \frac{7}{7} \Rightarrow$ sempre positiva

non può mai essere negativa!

MEMO: $|y| = |x| \Rightarrow \begin{cases} y=x \Rightarrow y=x \\ -y=-x \Rightarrow y=x \\ y=-x \quad y=-x \\ -y=x \Rightarrow y=-x \end{cases}$ $\begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases}$ $y = \pm x$

Risolviamo $|2x| \geq 4x^2-2$

$A(x) = 2x \Rightarrow$ studiamo il segno del valore assoluto

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ 

$\Rightarrow x < 0 \;\; e \;\; x \geq 0$

Pertanto nell'intervallo $x<0$ per la definizione di valore assoluto avremo che $|2x| = -2x$, mentre nell'intervallo $x \geq 0$ $|2x| = +2x$ - Scriveremo pertanto i 2 sistemi:

$S_1 \begin{cases} x<0 \\ -2x \geq 4x^2-2 \end{cases}$ $\quad S_2 \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x \geq 4x^2-2 \end{cases}$ che risolti $\Rightarrow$

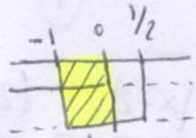
$S_1 \begin{cases} x<0 \\ -4x^2+2-2x \geq 0 \end{cases}$ $\quad S_2 \begin{cases} x \geq 0 \\ -4x^2+2+2x \geq 0 \Rightarrow 4x^2-2x-2 \leq 0 \end{cases}$

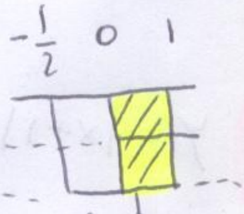
$4x^2+2x-2 \leq 0 \Rightarrow 2x^2+x-1 \leq 0$ $\quad 2x^2-x-1 \leq 0$

$\Delta = 4-4\cdot-2\cdot4 = 36$ $\quad \Delta = 1-4\cdot-1\cdot2 = 1+8 = 9$

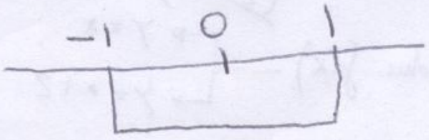
$x_{1,2} = \frac{-2\pm6}{8} = \frac{-8/8=-1}{4/8_2 = 1/2}$ $\quad x_{1,2} = \frac{+1\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$; $\frac{-2}{4} = -1/2$

$\left.\begin{matrix}\Delta>0 \\ \varepsilon<0 \\ a>0\end{matrix}\right\}$ interni $\Rightarrow -1 \leq x \leq 1/2$ $\quad \left.\begin{matrix}\Delta>0 \\ \varepsilon<0 \\ a>0\end{matrix}\right\}$ interni

$\begin{cases} x<0 \\ -1 \leq x \leq +1/2 \end{cases}$  soluzione comune POSITIVA

$\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$  (soluzione comune POSITIVA)

Per trovare le soluzioni della n/s disequazione dobbiamo unire le soluzioni dei due sistemi $\Rightarrow$ sistema unione $\Rightarrow$

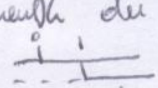
 $\Rightarrow$ La n/s disequazione è soddisfatta per $-1 \leq x \leq 1$

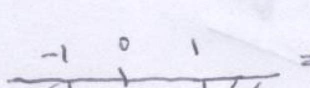
$S_1 \cup S_2 = [-1, 1]$

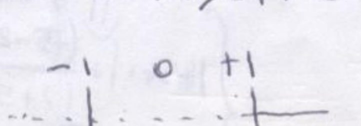
Disequazioni con + valori assoluti:

$|x-1| \geq |x^2-1| \Rightarrow \left\{\frac{|x-1|}{|x^2-1|} \geq 1\right\} \Rightarrow \left\{\frac{|x-1|}{|x^2-1|} - 1 \geq 0\right\} \Rightarrow \left\{\frac{|x-1|-|x^2-1|}{|x^2-1|} \geq 0\right\}$

Studiamo i segni degli argomenti dei valori assoluti:

$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ 

$x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \pm\sqrt{1} = x \geq \pm1$  $\Rightarrow x \leq -1 \;\vee\; x \geq +1$

ossia:  $\}$ da cui estrapoliamo i possibili intervalli: $\begin{cases} x \leq -1 \\ -1 \leq x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Avremo pertanto tre sistemi di disequazioni:

Nell'intervallo $x < -1$, abbiamo: $\begin{cases} x-1<0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) = -x+1 = 1-x \\ x^2-1 \geq 0 \Rightarrow |x^2-1| = x^2-1 \end{cases}$

AD ES. $x = -2$

Pertanto la n/s disequazione sarà: ad es. $x=-2$ (3)

$-x+1 \geq x^2-1 \Rightarrow x^2+x-2 \leq 0$

$\begin{cases} a>0 \quad \Delta = 1+4\cdot 2 = 9 > 0 \\ eq \leq 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \frac{-4}{2}=-2,\ \frac{2}{2}=1 \end{cases} \quad -2 \leq x \leq 1$

Nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ risulta: ad es. $x=0$

$x-1 \leq 0 \wedge x^2-1 \leq 0$

Dunque la disequazione, diventa:

$\underbrace{|x-1| = -(x-1)}_{(1-x)}$ ovvero $|x^2-1| = \underbrace{-(x^2-1)}_{1-x^2}$

$(1-x) \geq (1-x^2) \Rightarrow x^2-x \geq 0$

Nel terzo ed ultimo intervallo $x \geq 1$, abbiamo:

AD ES. $x=2$

$x-1 \geq 0 \wedge x^2-1 \geq 0$, pertanto la disequazione, diventa: $\begin{cases} |x-1| = +(x-1) \\ |x^2-1| = +(x^2-1) \end{cases}$

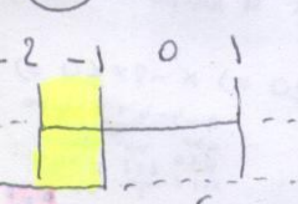
$x-1 \geq x^2-1 \Rightarrow x\cancel{-1}-x^2\cancel{+1} \geq 0 \Rightarrow -x^2+x \geq 0 \Rightarrow x^2-x \leq 0$

Abbiamo pertanto ottenuto 3 sistemi di disequazioni:

$S_1 \begin{cases} x<-1 \\ x^2+x-2 \leq 0 \end{cases}$, $S_2 \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-x \geq 0 \end{cases}$, $S_3 \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-x \leq 0 \end{cases}$

Risolviamoli:

$S_1 \Rightarrow$ $x<-1$, $x_{1,2} \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$,

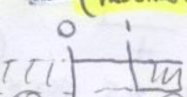


$-2 \leq x < -1 = S_1$

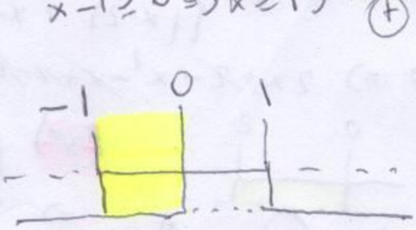
parte comune positiva del sistema!

S_2 $-1 \leq x \leq 1$

$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{array}\right\}$ (Prodotto del segno!)



$\Rightarrow x < 0 \vee x \geq 1$



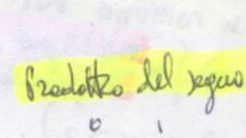
$-1 \leq x \leq 0 = S_2$

Parte comune positiva del sistema.

S_3

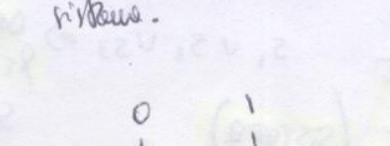
$x \geq 1$

$\left.\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \leq 1 \end{array}\right\}$ Prodotto del segno.



$0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow$



$S_3 = 1$

A questo punto uniamo gli insiemi delle soluzioni nel nostro sistema Unione $\Rightarrow$

$$S_1\ \left\{ -2 \le x \le -1 \right.,\quad S_2\ \left\{ -1 \le x \le 0 \right.,\quad S_3\ \left\{ 1 \right. \Rightarrow$$

−2 −1 0 1

$$S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Pertanto l'unione delle soluzioni sarà data da:

$$-2 \le x < 0 \ \vee\ x = 1 \quad \text{o} \quad S[-2, 0] \cup \{1\}$$

(*) $$y = \frac{(2-x)|x+1| + |x-2|}{(2-x)} \qquad y > 0 \Rightarrow \frac{(2-x)|x+1| + |x-2|}{(2-x)} > 0$$

$$\text{CE} \Rightarrow x \neq 2 \qquad \begin{cases} n(x) \Rightarrow (2-x)|x+1| + |x+2| \\ D(x) \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

$\boxed{Dx: x < 2}$ $\wedge$ $n(x) \Rightarrow$ studio del segno di $|x+1|$ e $|x-2|$ $\Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$ (A SISTEMA)

−1 0 2

$(x \neq 2) \Rightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ -1 \le x \le 2 \\ x \ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1° \\ 2° \\ 3° \end{cases}$ 3 sistemi! da verificare

+ − +

(1°)

Iniziamo per $x \le -1$ (es. $x = -2$) $\Rightarrow \begin{cases} |x+1| \Rightarrow -(x+1) = -x-1 \\ |x-2| \Rightarrow -(x-2) = -x+2 = 2-x \end{cases}$; sostituiamo $\Rightarrow$ in $N(x) \Rightarrow$

$$(2-x)(-x-1) + (2-x) > 0 \Rightarrow -2x - \cancel{2} + x^2 + \cancel{x} + \cancel{2} - \cancel{x} > 0 \Rightarrow x^2 - 2x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \ \vee \\ x - 2 > 0 \Rightarrow \\ x > 2 \ \vee \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ prodotto dei segni $\Rightarrow$

0 2

(1°) prodotto dei segni

$a > 0$, $\Delta = 4 > 0$, $a > 0$, $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2}{2} = \frac{4/2 = 2}{0}$ esterni

(2°) + − +

Poi analizziamo $-1 \le x \le 2$ es per $x = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-2| = -(x-2) = 2-x \end{cases}$ e sostituiamo in $N(x) \Rightarrow$

$$(2-x)\cdot(x+1) + (2-x) \ge 0 \Rightarrow 2x + 2 - x^2 - \cancel{x} + 2 - \cancel{x} \ge 0 \Rightarrow \boxed{-x^2 + 4 \ge 0} \Rightarrow -x^2 \ge -4 \Rightarrow x^2 \le 4 \Rightarrow$$

$\Delta = -4 \cdot 4 \cdot -1 = 16 > 0$, $Eq > 0$, $a < 0$, $x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{16}}{-2} = \frac{\pm 4}{-2}$ $\begin{cases} \frac{4}{-2} = -2 \\ -\frac{4}{-2} = 2 \end{cases}$

la soluz. valori interni!

$\Rightarrow x \le \pm 2 \rightarrow$

−2 2

(2°) prodotto dei segni $\Rightarrow -2 \le x \le 2$

(3°) + − +

Infine studiamo $x \ge 2$ es. per $x = 3 \Rightarrow \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-2| = x-2 \end{cases}$ e sostituendo come al solito in $N(x) \Rightarrow$

$$(2-x)\cdot(x+1) + (x-2) \ge 0 \Rightarrow 2x + \cancel{2} - x^2 - \cancel{x} + \cancel{x} - \cancel{2} \ge 0 \Rightarrow -x^2 + 2x \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2x \le 0 \Rightarrow$$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4 > 0$, $a > 0$, $a < 0$ val. interni, $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2}{2} = \frac{4/2 = 2}{0}$

$$\begin{cases} x \le 0 \\ x - 2 \le 0 \Rightarrow x \le 2 \end{cases} \Rightarrow$$

0 2

(3°) prodotto dei segni $\Rightarrow 0 \le x \le 2$

+ − +

A questo punto creiamo il relativo sistema unione dei nostri 3 sistemi $\Rightarrow$ solo soluzioni comuni.

−2 0 2

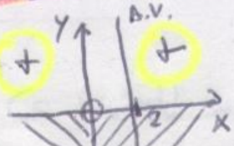
(SISTEMA)

non ammette soluzioni!

$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow$ DEL SISTEMA UNIONE SI CONSIDERANO SOLO LE PARTI IN COMUNE POSITIVE

SOLUZIONI $\Rightarrow$ { NESSUNA soluzione; Sicuramente $\Rightarrow$ sempre + } $\Rightarrow$

$$\begin{cases} n(x) \Rightarrow x < -2 \ ; \ x > 2 \\ D(x) \Rightarrow x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{prodotto dei segni di una disequazione fratta} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ −2 0 2

$x < 2$, $-1 \le x \le 2$, $x \ge 2$, $x \neq 2$ } sempre (+)

$$y = |x+1| + \frac{|x-2|}{(2-x)}$$ ⇒ studio del segno di $|x+1|$ e $|x-2|$ $\begin{cases} x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases}$

-1 0 2

+ − +

5

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x \leq -1 \\ -1 \leq x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases}\right\} \begin{matrix} 1° \; S_1 \\ 2° \; S_2 \\ 3° \; S_3 \end{matrix} \times N(x) \qquad \{ C.E. \Rightarrow D \; x \neq 2 \}$$

S_1) per $x \leq -1$ es: $x=-2$ ⇒ $\begin{cases} |x+1| \Rightarrow -(x+1) = -x-1 \\ |x-2| \Rightarrow -(x-2) = 2-x \end{cases}$ che sostituita in $f(x)$ ⇒

$$y = -x-1 + \frac{2-x}{2-x} = -x-1+1 = -x \Rightarrow y = -x$$

S_2 per $-1 \leq x \leq 2$ ⇒ $\begin{cases} |x+1| \Rightarrow x+1 \\ |x-2| \Rightarrow -(x-2) = 2-x \end{cases}$ sostituiamo in $f(x)$ ⇒

$$y = x+1 + \frac{2-x}{2-x} = x+1+1 = x+2 \Rightarrow y = x+2$$

S_3 per $x \geq 2$ ⇒ $\begin{cases} |x+1| \Rightarrow x+1 \\ |x-2| \Rightarrow x-2 \end{cases}$ sostituiamo in $f(x)$ ⇒

$$y = (x+1) + \frac{x-2}{(2-x)} = \frac{(x+1)(2-x) + x-2}{2-x} = \frac{2x - x^2 + \cancel{2} - \cancel{x} + \cancel{x} - \cancel{2}}{2-x} = \frac{-x^2+2x}{2-x}$$

$$y = \frac{-x^2+2x}{2-x}$$

$y_I > 0$; $y_{II} > 0$; $y_{III} > 0$ ⇒

S_1) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

S_2) $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

S_3) $\begin{cases} N(x) \Rightarrow -x^2+2x \geq 0 \Rightarrow x^2-2x \leq 0 \Rightarrow x(x-2) \leq 0 \\ D(x) \Rightarrow x \neq 2 \text{ con } 2-x > 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases}$

$x \leq 0$; $x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$

(Prodotto dei segni disequazione fratta)

0 2

(+) − (+) ⇒ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

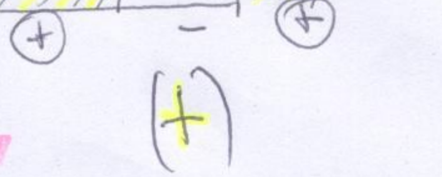
(+)

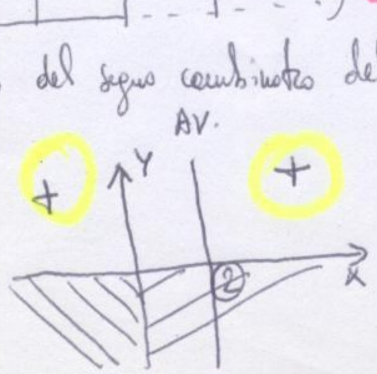
Sistema unione $S_1 \cup S_2 \cup S_3$

-2 0 2

lasciare soluzione comune ai 3 sistemi.

Studio del segno combinato delle 3 $f(x)$ ⇒





$f x$

(sempre positiva) con salto in $x = 2$